RODOLFO GUIDOBONO | **CURSO ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**
EJERCICIO CAPÍTULO 2 | **JAVIER GARCÍA**

EJERCICIO (10:04)

Demostrar que si una matriz M conmuta con las matrices $\boldsymbol{\gamma^\mu}$ entonces debe ser de la forma $\boldsymbol{M = \alpha \mathbb{I}_{4x4}}$

Partiendo de la relación de anticonmutación de las matrices de Dirac:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Se verifica que:

[1] $\gamma^0\gamma^0 = 1$

[2] $\gamma^i\gamma^i = -1$ para i igual a 1, 2, 3

[3] $\gamma^i\gamma^j = -\gamma^i\gamma^j$

Existe la siguiente base del espacio de matrices de 4x4: $\{\mathbb{I}_{4x4};\ \gamma^\mu; i\gamma^{\mu\nu};\ \gamma^\mu\gamma^5;\ \gamma^5\}$

Donde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que cumple que $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$ y $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu$

Generamos otra base de elementos Γ^i agregando constantes i y (-i) para que cumplan con la propiedad [4]

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1 = \gamma^0\\
&\Gamma^2 = i\gamma^1\\
&\Gamma^3 = i\gamma^2\\
&\Gamma^4 = i\gamma^3\\
&\Gamma^5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\\
&\Gamma^6 = \gamma^0\gamma^1\\
&\Gamma^7 = \gamma^0\gamma^2\\
&\Gamma^8 = \gamma^0\gamma^3\\
&\Gamma^9 = -i\gamma^1\gamma^2\\
&\Gamma^{10} = -i\gamma^2\gamma^3\\
&\Gamma^{11} = -i\gamma^3\gamma^1\\
&\Gamma^{12} = -i\gamma^0\gamma^5\\
&\Gamma^{13} = \gamma^1\gamma^5\\
&\Gamma^{14} = \gamma^2\gamma^5\\
&\Gamma^{15} = \gamma^3\gamma^5\\
&\Gamma^{16} = \mathbb{I}_{4x4}
\end{aligned}$$

Para estas matrices, como se buscaba, se cumple que

[4] $\Gamma^i\Gamma^i = \mathbb{I}_{4x4}$

Para la matriz Γ^1 se cumple por la propiedad [1]. Para las matrices $\Gamma^2 a\ \Gamma^4$ por el factor i y la propiedad [2]. Para la verificación del resto es necesaria además la propiedad [3]

$$\begin{aligned}
\Gamma^5\Gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3\\
&= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\\
&= \gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2 = \gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = 1
\end{aligned}$$

$$\Gamma^6\Gamma^6 = \gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^1 = 1$$

$$\Gamma^7\Gamma^7 = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^2\gamma^2 = 1$$

$\Gamma^8\Gamma^8 = \gamma^0\gamma^3\gamma^0\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^3\gamma^3 = 1$
$\Gamma^9\Gamma^9 = -i\gamma^1\gamma^2(-i\gamma^1\gamma^2) = -\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = \gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2 = 1$
$\Gamma^{10}\Gamma^{10} = -i\gamma^2\gamma^3(-i\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = \gamma^2\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = 1$
$\Gamma^{11}\Gamma^{11} = -i\gamma^3\gamma^1(-i\gamma^3\gamma^1) = -\gamma^3\gamma^1\gamma^3\gamma^1 = \gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^1 = 1$
$\Gamma^{12}\Gamma^{12} = -i\gamma^0\gamma^5(-i\gamma^0\gamma^5) = -= -\gamma^0\gamma^5\Gamma^0\Gamma^5 = \gamma^0\gamma^0\Gamma^5\Gamma^5 = 1$
$\Gamma^{13}\Gamma^{13} = \gamma^1\gamma^5\gamma^1\gamma^5 = -\gamma^1\gamma^1\Gamma^5\Gamma^5 = 1$
$\Gamma^{14}\Gamma^{14} = \gamma^2\gamma^5\gamma^2\gamma^5 = -\gamma^2\gamma^2\Gamma^5\Gamma^5 = 1$
$\Gamma^{15}\Gamma^{15} = \gamma^3\gamma^5\gamma^3\gamma^5 = -\gamma^3\gamma^3\Gamma^5\Gamma^5 = 1$

Otra propiedad es que para cada Γ^j que no sea la identidad existe al menos una Γ^i para la que se cumple que:

[5] $\Gamma^i\Gamma^j\Gamma^i = -\Gamma^j$

Demostramos esta propiedad para los elementos $\gamma^\mu; \gamma^{\mu\nu};\ \gamma^\mu\gamma^5;\ \gamma^5$

$\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu$

$\gamma^\eta\gamma^{\mu\nu}\gamma^\eta = \gamma^\eta(\gamma^\mu\gamma^\nu)\gamma^\eta = -\gamma^\eta\gamma^\mu\gamma^\eta\gamma^\nu = \gamma^\eta\gamma^\eta\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\mu\gamma^\nu$

$\gamma^\nu(\ \gamma^\mu\gamma^5)\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = \gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^5 = -\ \gamma^\mu\gamma^5$

$\gamma^0(\ \gamma^0\gamma^5)\gamma^0 = \gamma^5\gamma^0 = -\ \gamma^0\gamma^5$

$\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^5 = -\gamma^5$

Si M conmuta con γ^μ: $[M, \gamma^\mu] = 0$

Entonces también conmuta con Γ^i: $\left[M, \Gamma^i\right] = 0$

Si expresamos $\Gamma^i = \gamma^\mu\gamma^\nu$

$\left[M, \Gamma^i\right] = [M, \gamma^\mu\gamma^\nu] = \gamma^\mu[M, \gamma^\nu] + [M, \gamma^\mu]\gamma^\nu = 0$

Entonces:

$M\Gamma^i - \Gamma^i M = 0$

$M\Gamma^i = \Gamma^i M$

$\Gamma^i M\Gamma^i = \Gamma^i\Gamma^i M$

Por la propiedad [4]

[6] $\Gamma^i M\Gamma^i = M$

M a su vez puede escribirse como combinación lineal de esta matrices

$$M = x_i\Gamma^i = x_k\Gamma^k + \sum_{i\neq k} x_i\Gamma^i$$

$$\Gamma^j M\Gamma^j = x_k\Gamma^j\Gamma^k\Gamma^j + \sum_{i\neq k} x_i\Gamma^j\Gamma^i\Gamma^j$$

Por la propiedad [5] sabemos que hay al menos un elemento de la base distinto de la identidad tal que:
$\Gamma^j \Gamma^k \Gamma^j = -\Gamma^k$

$$\Gamma^j M \Gamma^j = -x_k \Gamma^k + \sum_{i \neq k} \pm x_i \Gamma^i$$

Por propiedad [6]

$$M = -x_k \Gamma^k + \sum_{i \neq k} \pm x_i \Gamma^i$$

Teniendo en cuenta que además:

$$M = x_k \Gamma^k + \sum_{i \neq k} x_i \Gamma^i$$

Se llega a una “coordenada” k diferente, lo cual no es posible. Esta demostración es válida para las matrices que cumplen con [5].

Por otro lado, si $\Gamma^k = \mathbb{I}_{4x4}$

$\Gamma^i \mathbb{I}_{4x4} \Gamma^i = \Gamma^i \Gamma^i = 1$

Es decir que M no puede ser sino:

$$\boxed{\boldsymbol{M = x_i \mathbb{I}_{4x4}}}$$